Revista Cacto
Ciência, Arte, Comunicação em Transdiciplinaridade Online
INSTITUTO FEDERAL
Sertão de Pernambuco

Os Caminhos Tomado Por Lagrange Na Concepção Da Mecânica Lagrangiana: Analisando O Movimento Caótico do Pêndulo Duplo

The Paths Taken by Lagrange in the Conception of Lagrangian Mechanics: Analyzing the Chaotic Movement of the Double Pendulum

Nicolas Ferreira De Souza[1]

Dionisio Felipe Dos Santos Junior[2]

Resumo:

Este trabalho apresenta os caminhos que Joseph-Louis Lagrange tomou para a concepção de seu formalismo, que junto com o formalismo Hamiltoniano colocou uma nova visão de mecânica além da de Newton. Abordo uma análise do movimento caótico do pêndulo duplo através do simulador SimuFisica. Os dados inseridos no experimento buscam observar tal fenômeno e analisar cada movimento, prever e identificar cada aspecto do sistema mecânico. O resultado busca visualizar diversos cenários.

Palavras-chave: Pêndulo Duplo, Sistema Caótico, Mecânica Lagrangeana.

Abstract:

This work presents the paths that Joseph-Louis Lagrange took for the conception of his formalism, which together with the Hamiltonian formalism put a new vision of mechanics beyond Newton's. I approach an analysis of the chaotic movement of the double pendulum through the SimuFisica simulator. The data inserted in the experiment seek to observe this phenomenon and analyze each movement, predict and identify each aspect of the mechanical system. The result seeks to visualize several scenarios.

Keywords: Double Pendulum, Chaotic System, Lagrangian Mechanics.

---

[1] Possui Graduação em Física pelo IFSertãoPE
[2] Possui Mestrado Profissional em Matemática pela Universidade Federal do Vale do São Francisco, Brasil(2015). Docente do IFSertãoPE.

1. Introdução

Quando Isaac Newton demonstrou pela primeira vez matematicamente como a mecânica do universo funcionava, uma nova visão da física se abriu, pensava-se que só a ideia de Newton fosse suficiente para explicar e solucionar os problemas sobre a mecânica, porém, Lagrange e Hamilton com criatividade e um novo ferramental matemático trouxeram um novo jeito de explicar o movimento dos corpos. As formulações Lagrangiana e Hamiltoniana da mecânica clássica são completamente equivalentes às de Newton, porém fornecem soluções drasticamente mais simples para diversos problemas complicados e são também o ponto de partida para muitos dos desenvolvimentos modernos [1].

A formulação Lagrangiana possui importantes vantagens sobre a formulação Newtoniana, as equações de Lagrange, ao contrário das de Newton [1], assumem a mesma forma em qualquer sistema de coordenadas. Neste trabalho abordo o caminho que Lagrange tomou até a mecânica Lagrangeana e utilizei o simulador SimuFisica [6] para analisar o pêndulo duplo, cada aspecto do sistema foi observado para uma visualização mais ampla em todos os cenários que diferentes dados são inseridos no experimento do pêndulo duplo.

2. As limitações da Mecânica Newtoniana e o surgimento do formalismo de Lagrange

A mecânica Newtoniana foi um marco para a física, Newton demonstrou como a natureza se comportava, definiu cada aspecto do movimento dos corpos celestes, estabeleceu leis imutáveis, evidenciou os trabalhos de Galileu, Copérnico e Kepler. Justamente por isso até hoje o trabalho de Sir Isaac Newton ainda possui bastante credibilidade, com sua lei da gravitação universal os astrônomos ganharam mais um ferramental para os seus estudos, estudar como um corpo se movimenta a cerca de uma determinada posição no espaço foi o que Galileu já vinha observando séculos antes. O poderoso e elegante formalismo desenvolvido por Lagrange permitiu escrever equações do movimento a partir de uma única função ao escalar [2]. Porém, o conhecimento científico está sempre sujeito a mudanças, uma nova forma de resolver um determinado problema pode surgir, uma nova visão acerca da natureza pode nos trazer para um novo patamar, assim foi com a mecânica Newtoniana, ela passou a sofrer com algumas limitações,[7] no ano de 1788 o matemático italo-francês Joseph-Louis Lagrange apresentou uma síntese de todo o conhecimento que se tinha até então sobre o formalismo de Newton, diferente da proposta criada por Newton e de suas leis, Lagrange relacionou a energia cinética de um sistema as suas coordenadas generalizadas, com força e tempo. Leonard Euler, outro matemático não menos importante, também expandiu oescopo das leis de Newton de partículas para corpos rígidos e formulou outras duas leis para explicar que as forças internas de um corpo não precisam ser distribuídas igualmente. A mecânica apresentada por Newton foi reformulada durante os séculos, matemáticos brilhantes como os já citados, Euler, Lagrange e Hamilton contribuíram para o enriquecimento teórico e rebuscado das ideias de Newton[7].

$$v = \frac{dr}{dt}$$

$$p = mv \qquad (1)$$

$$F = \frac{dp}{dt}$$

3. Formalismo de Lagrange

Lagrange concebeu a sua visão de movimento adicionando mais informações ao que Newton já havia dito, o seu formalismo permite obter as equações de movimento de um dado sistema que sem sombra de dúvidas é elegante e sistêmico. Esse formalismo é contrário aos métodos empregados por Newton, este formalismo não exige a identificação de forças envolvidas [8].

Leonard Euler, outro famoso matemático, também influenciou o caminho de Lagrange até o seu formalismo, a conhecida equação que leva o nome de ambos, trata da curva tautócrona [8]. Lagrange não foi o único a ir por este caminho de pensar a mecânica Newtoniana de outras formas, Hamilton também contribui com a sua mecânica Hamiltoniana, logo depois Albert Einstein disse que Newton não estava errado, só havia pensado diferente. A relatividade de Einstein explica o erro da mecânica clássica de Isaac Newton, que a gravidade não era uma força e sim uma deformação no espaço-tempo [1].

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\quad mr^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \qquad (2)$$

U=U(r) = U(x,y,)

Pode-se notar uma diferença bastante significativa referente aos formalismos de Newton e Lagrange. Leonard Euler também deu contribuições para o trabalho de Lagrange.

$$L = T - U$$

(3)

$$S = \int_{x1}^{x2} \quad f[y(x), y'(x), x]dx$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y\prime} = 0 \qquad (4)$$

4. Uma Análise do Pêndulo Duplo

Podemos determinar um conjunto de equações exclusivas para o pêndulo simples, equações horárias do movimento harmônico ou utilizando as leis de Newton, pode parecer a princípio que o seu funcionamento seja igual ao pêndulo duplo, nesse segundo caso as equações de Newton como bem conhecemos não surtem efeitos, pois o sistema do pêndulo duplo é bastante complexo para uma análise através da mecânica Newtoniana [1].

Sistemas mecânicos que podemos expressar de forma não linear, matematicamente falando, pode nos levar a modelos caóticos, como o pêndulo duplo [3]. A mecânica clássica, na qual Isaac Newton devotou anos de sua vida, é demonstrada de certa forma preditiva, na mecânica de Newton um cometa pode ser modelado e previsto, estou me referindo a sua órbita [1]. O sistema caótico no qual um pêndulo duplo está inserido, parte do pressuposto de que que não importa os dados que submetemos o pêndulo, o ângulo modificado ou o comprimento alterado, sempre vai tender para o caos, visto que tentar prever seu movimento é uma tarefa complexa.

Na estruturação do problema envolvendo o pêndulo duplo, diversos dados foram inseridos para uma análise mais apurada do comportamento do experimento. Busquei os dados obtidos para tentar prever o comportamento do pêndulo. A sua simulação do pêndulo com diferentes entrada de dados, torna o sistema ainda mais complexo, gerando equacoẽs não lineares, a maioria dos sistemas cujas equações de movimento são não lineares podem exibir o caos, tal fenômeno surpreende bastante físicos e pesquisadores, diversas áreas do conhecimento estão sujeitas a ele, sistemas mecânicos oscilatório, escoamento de fluido, reações químicas e difusão de doenças, porém, mesmo que obedeça a um sistema de equações de movimento determinística, seu comportamento é imprevisível [1,3]. A simulação utiliza o lagrangeano e suas equações são resolvidas utilizando o método de Runge-kutta de quarta ordem [6].

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2){L^2}_1\, \theta^2 + \frac{1}{2} m_2 {L^2}_2\, {\theta^2}_2\; + m_2 L_1 L_2 \theta_1 \theta_2 cos(\theta_1 - \theta_2) +$$

$$+(m_1 + m_2) g L_1 cos\theta_1 + m_2 g L_2 cos\theta_2$$

(5)

O Lagrangeano serviu como base para a simulação, e as equações do movimento são resolvidas pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem[6].

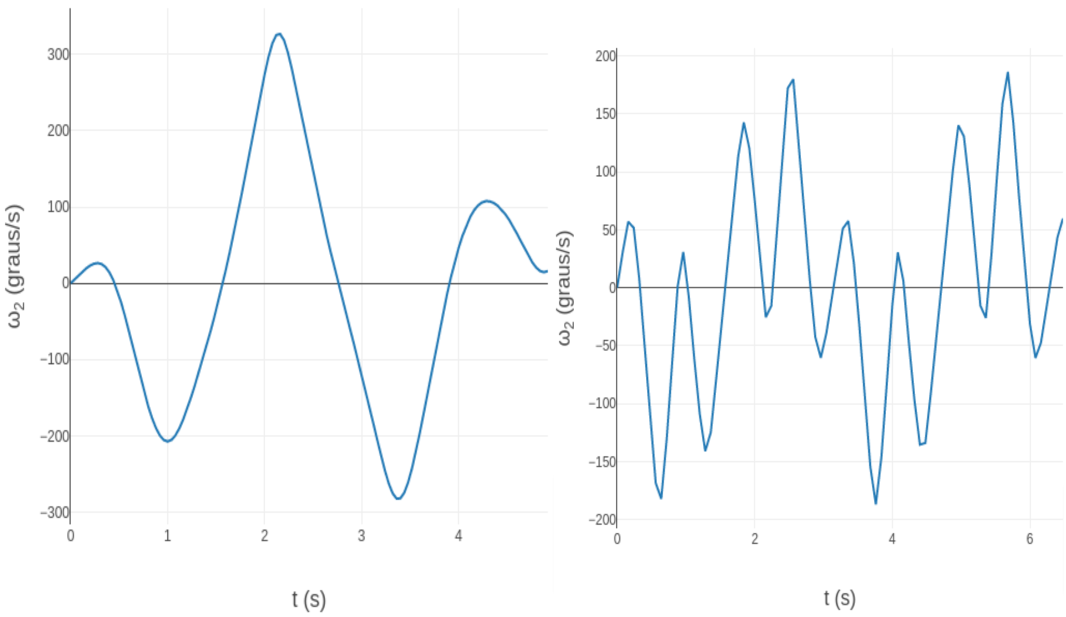
5. Resultados

O resultado obtido pela simulação é apresentado em gráficos, o movimento de pêndulo duplo expressa a situação normal, com os dados inseridos, ângulo inicial, posição e a massa dos objetos de forma padrão. Como se trata do movimento de duas massas acopladas em um fio de certo comprimento, não podemos analisar o seu movimento pelo clássico formalismo de Newton como bem sabemos. Ao se tratar de um sistema caótico, mais equações e simulações mais sofisticadas podemos tentar prever o movimento de cada massa, oque pode-se observar foi a estabilidade do sistema alterando os seus dados.

Os parâmetros apresentados no início do experimento compõe : $\theta_1 = 45°$ ângulo inicial da primeira massa; $\theta_2 = 30°$ângulo inicial da segunda massa; $L_1 = 150cm$ comprimento da primeira corda; $L_2 = 100cm$ comprimento da segunda corda; $\omega_1 = 0°/s$ velocidade angular da primeira massa; $\omega_2 = 0°/s$ velocidade angular inicial da segunda massa; $m_1 = 20g$; $m_2 = 5g$; h=0.004s é a integração temporal oferecido pela simulação como forma de trazer mais precisão ao sistema. Esses parâmetros levam a dinâmica caótica do sistema abaixo:

(i) **(ii)**

Figura 1: O pêndulo(i) com todos os dados necessários para a demonstração e o pêndulo(ii) já em movimento descrevendo o seu comportamento caótico.



(iii) **(iv)**

Figura 2: Os dois gráficos demonstram o comportamento do pêndulo duplo, a imagem do lado esquerdo(iii) demonstra o comportamento caótico do pêndulo sem nenhuma alteração, com os dados oferecidos pela própria aplicação, a figura do lado direito(iv mostra o comportamento do pêndulo mais estável.

Os parâmetros apresentados compõem a solução periódica do pêndulo duplo, os dados apresentados resultam no gráfico(iv) do lado direito: no início do experimento compõe : $\theta_1 = 60°$ ângulo inicial da primeira massa; $\theta_2 = 60°$ângulo inicial da segunda massa; $L_1 = 100cm$ comprimento da primeira corda; $L_2 = 100cm$ comprimento da segunda corda; $\omega_1 = 0°/s$ velocidade angular da primeira massa; $\omega_2 = 0°/s$ velocidade angular inicial da segunda massa; $m_1 = 10g$;$m_2 = 10g$; h=0.004s é a integração temporal oferecido pela simulação como forma de trazer mais precisão ao sistema.

O efeito caótico gerado pelo o pêndulo duplo pode-se observar durante a simulação, as equações de Lagrange possuem ampla possibilidade de aplicação, neste trabalho não foi mencionado o formalismo de Hamilton, porém, seus trabalhos podem ser notados e aplicados na mecânica quântica.

6. Conclusão

Neste trabalho apresento os caminhos que foram tomados até o formalismo de Lagrange, foi apresentado também a observação do fenômeno caótico do pêndulo duplo, utilizando o simulador de fenômenos físicos SimuFisica [6], foi possível observar cada etapa do sistema caótico do pêndulo. O estado inicial do pêndulo duplo quando posto em movimento pode-se notar o quão caótico o sistema se torna, os gráficos gerados pela simulação são colocados neste trabalho, modificando o peso dos objetos, alterando os ângulos iniciais e o comprimento das cordas, observou se que o experimento se tornou ainda mais caótico.

Referências

[1] TAYLOR, John R. **Mecânica clássica**. Bookman Editora, 2013.

[2] LEMOS, Nivaldo A. **Mecânica analítica**. Editora Livraria da Física, 2007.

[3] MACHADO, Fabrício Caluza. **Simulação de um pêndulo duplo flexível.**

[4] CHABU, Victor Bernardo.**Introdução Mecânica Lagrangiana**.2011

[5] NETO, João Barcelos. **Mecânica Newtoniana e Lagrangiana.**2004

[6] https://simufisica.com

[7] ROONEY, Anne. **História da Física.** M Books Editora, 2011

[8] FÍSICA, O livro da. Editora Globo, 2021