Revista Semiárido De Visu

ISSN 2237-1966

GOMES, T. O.; SILVA, R. C.; MORAIS, L. B.
Aplicações do cálculo diferencial no cotidiano
DOI: 10.31416/rsdv.v7i3.82

Aplicações do cálculo diferencial no cotidiano

Applications of differential calculus in everyday life

GOMES, Thiago de Oliveira.
Instituto Federal de Educação do Sertão Pernambucano – Salgueiro. BR 232, km 508 – Zona Rural - Salgueiro – PE – Brasil. CEP: 56.000-000 / Telefone: (87) 3421.0050 / E-mail: thiago.oliveira_gomes@hotmail.com

SILVA, Raquel Costa da. Mestre em Estatística
Instituto Federal de Educação do Sertão Pernambucano – Salgueiro. BR 232, km 508 – Zona Rural - Salgueiro – PE – Brasil. CEP: 56.000-000 / Telefone: (87) 3421.0050 / E-mail: raquel.costa@ifsertao-pe.edu.br

MORAIS, Leonardo Bernardo de. Mestre em Matemática
Instituto Federal de Educação do Sertão Pernambucano – Salgueiro. BR 232, km 508 – Zona Rural - Salgueiro – PE – Brasil. CEP: 56.000-000 / Telefone: (81) 3421.0050 / E-mail: leonardo.morais@ifsertao-pe.edu.br

RESUMO

A Matemática teve seu surgimento nos problemas práticos que a humanidade se deparava no princípio da caminhada do conhecimento. Em vista disso, ela se relaciona intrinsecamente à realidade. Notadamente, o cálculo mostra-se vasto com relação a sua aplicabilidade às mais variadas situações do dia a dia. Desse modo, o presente trabalho de pesquisa teve como objetivo o estudo e posteriormente a identificação de situações cotidianas passíveis de serem modeladas por funções e resolvidas através do cálculo diferencial. Fazendo-se o estudo das derivadas e de suas aplicabilidades, confirmado por meio de atividades desenvolvidas na fase de maturação da pesquisa, encontrou-se a presença do cálculo diferencial em situações corriqueiras, tais como ao lavar roupas, na minimização do comprimento de um varal e na localização da carteira com melhor ângulo de visão. Expondo dessa maneira, como a Matemática e, mais especificamente o cálculo diferencial está ligado ao cotidiano das pessoas e como esse pode ser utilizado na análise e solução de problemas do nosso dia a dia.

Palavras-chave: Matemática aplicada, Derivadas, Dia a dia

ABSTRACT

Mathematics had its emergence in the practical problems that humanity encountered at the beginning of the journey of knowledge. Given this, it's intrinsically related to reality. Notably, the calculation is vast in relation to its applicability in the most varied daily situations. Thus, the present research work aimed at the study and later the identification of everyday situations that can be modeled by functions and solved through differential calculus. Making the study of derivatives and their applicability, confirmed by mean of activities developed in the process of research maturation, different calculus was found in everyday situations, such as when washing clothes, minimizing the clothing line length and the location of the desk with the best viewing angle. Exposing in this way, how mathematics and more specifically, of differential calculus is connected to the daily life of people and how it can be used in the analyzing and solving our daily problems.

keywords: Applied Mathematics, Derivatives, Day to day

Introdução

ISSN 2237-1966

O cálculo integral e diferencial é uma poderosa ferramenta matemática aplicada de forma ampla na atualidade. Caracterizando-se por ser dinâmico, ele trata da variação e do movimento e tem cooperado para o avançar de várias outras ciências. Para tanto, seu estudo foi desenvolvido ao longo de vários séculos, sendo motivado inicialmente pela resolução de problemas encontrados na realidade do homem, tais como o de calcular a área da superfície de um cesto, como mostra o Papiro Egípcio de Moscou (BOYER, 2010). Resultado da contribuição de inúmeros matemáticos, o cálculo foi paulatinamente sendo lapidado, a partir da introdução de novas ideias e do aperfeiçoamento do estudo construído por matemáticos que viveram anteriormente.

Apesar de ter tido vários precursores como Arquimedes, Kepler e Fermat, foram o inglês Isaac Newton (1642–1727) e o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) que se destacaram na criação e no desenvolvimento do cálculo integral e diferencial. Eles foram responsáveis por uma consolidação efetiva do conhecimento que até então havia sido desenvolvido. Surpreendentemente, seus trabalhos contemporâneos emergiram com visões distintas para um mesmo ramo da Matemática, o cálculo, mesmo eles trabalhando de maneira dissociada.

Em especial, o ponto de partida para o desenvolvimento do cálculo diferencial relaciona-se ao problema das retas tangentes a uma curva em um dado ponto, cujo conceito vem desde a Grécia antiga e que foi aprimorado no decurso histórico, ora por meio de novas técnicas, ora através das já existentes. Alguns exemplos nesse sentido foram apresentados por Arquimedes e Apolônio (IME - USP, 2012).

Segundo Paranhos (2009), a questão da reta tangente à uma curva teve notável importância particularmente para Isaac Newton, devido ao seu interesse pelos movimentos dos planetas. Isso o motivou no desenvolvimento do cálculo diferencial, levando-o, em princípio, a denominar esse feito de método de fluxos, que tem como ideia subjacente a taxa de variação.

Nas conclusões de Isaac Newton, uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser, em geral, quantidades variáveis. À uma quantidade variável, ele atribuía o nome de fluente (uma quantidade que flui) e à sua taxa de variação, o nome de fluxo de fluente. Indicava-se um fluente, ou ordenada do ponto gerador, por y, e o fluxo desse fluente por $\dot{y}$. Segundo Eves (2004, p. 439), “essa taxa de

ISSN 2237-1966

crescimento constante de algum fluente é o que ele chamava fluxo principal, podendo o fluxo de qualquer outro fluente ser comparado com esse fluxo principal".

Gottfried Leibniz, por sua vez, pensou o cálculo na concepção de ser uma diferencial, onde ela é a diferença entre dois valores próximos de uma variável. Para ele,

> a determinação da tangente a uma curva dependia da razão das diferenças das ordenadas e das abscissas, quando essas se tornavam infinitamente pequenas (BOYER, 2010, p. 276).

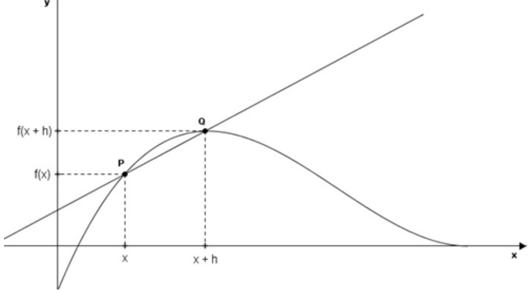
Apesar dos conflitos gerados pelas coincidências históricas nos trabalhos produzidos por Newton e Leibniz, sabe-se, atualmente, que os mesmos seguiram percursos diferentes no desenvolvimento do cálculo, contribuindo extraordinariamente para o desenvolvimento da Matemática. Uma característica marcante deixada por Gottfried Leibniz, além de todo o legado do conceito em si, foi sua simbologia, que permanece sendo utilizada no mundo contemporâneo.

Contudo, o aperfeiçoamento dessa versátil ferramenta não se limitou aos dois estudiosos supracitados, pois nomes como os dos irmãos Bernoulli, L'Hospital, Lagrange, D'Alembert, Cauchy, Weierstrass e Riemann, contribuíram grandiosamente para o estabelecimento de conceitos basilares da Análise Matemática, a qual inclui o cálculo diferencial e integral.

Atualmente, a definição moderna da derivada pode ser enunciada como se segue: dada a função f, definida em um intervalo real, chamamos derivada de f à função (expressa em [1.2]), se existir e for finito este limite (IEZZI, 1999, p. 135).

Graficamente, esse conceito matemático pode ser obtido a partir do traçado de retas tangentes a uma função dada. Para isso, consideremos uma função $y = f(x)$, em um intervalo real, cujo gráfico contém os pontos $P\ (x, f(x))\ e\ Q\ (x + h, f\ (x + h))$, como representado na Figura 1, abaixo

Figura 1: Reta secante PQ.



Fonte: autoria própria

Periódico científico de acesso livre

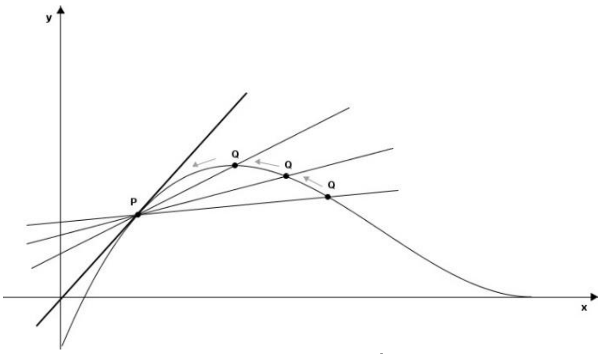
A inclinação da reta secante PQ será expressa por

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (1.1),$$

Onde ao fazermos o ponto Q se aproximar de P, como ilustrado no gráfico da Figura 2, as inclinações das retas secantes tenderão à inclinação da reta tangente, que por sua vez valerá

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (1.2).$$

Figura 2: Retas secantes tendendo a reta tangente em P.



Fonte: autoria própria

Outra interpretação da derivada é a taxa de variação instantânea de uma função, que tem como exemplo canônico, a velocidade, que representa a taxa de variação instantânea do espaço em relação ao tempo. Do mesmo modo, a aceleração representa a derivada da velocidade. Assim, a depender da área científica de estudo, a derivada assume um nome especifico:

> Se f for um volume variando em relação ao tempo então $f'(t)$ é chamada de vazão; Se f for uma quantidade de carga variando em relação ao tempo então $f'(t)$ é chamada de corrente elétrica; Se f for um custo variando em relação a uma quantidade x de material então $f'(x)$ é chamada de custo marginal (SILVA, 2012, p. 20).

Além disso, a derivada ainda pode ser utilizada na determinação de valores máximos e mínimos de funções, que na visão geométrica desenvolvida inicialmente por Fermat (EVES, 2004), significa encontrar os pontos onde a reta tangente à curva

ISSN 2237-1966
Periódico científico de acesso livre

tem inclinação zero. À respeito disso, Stewart (2011, p. 301) afirma que:

> Os métodos estudados para encontrar os valores extremos têm aplicações práticas em muitas situações do dia a dia [...] problemas tais como maximizar áreas, volumes e lucros e minimizar distâncias, tempo e custos.

Desse modo, considerando a vasta aplicabilidade do cálculo diferencial, objetivou-se, no presente artigo, modelar situações problemas em contextos sociais passíveis de serem modeladas e resolvidas com o auxílio do cálculo diferencial.

Nesse sentido, buscou-se evidenciar as possibilidades de uso do conceito em foco, com destaque para os usos sociais, sobretudo em problemas reais.

Material e métodos

Este artigo é um recorte de uma pesquisa mais ampla de Iniciação Científica Júnior, que teve como objetivo modelar situações cotidianas por meio do Cálculo diferencial. Aqui, apresentamos três das seis situações modeladas no estudo original, por elas terem sido construídas na etapa final da pesquisa supracitada. As demais situações já foram objeto de outra publicação.

Tendo em vista que a pesquisa foi desenvolvida por um pesquisador júnior, embora sob a orientação de outros dois pesquisadores, fez necessário, de início, a realização das seguintes etapas:

- revisão de literatura;
- estudo teórico e prático de atividades relacionadas aos conteúdos de funções, limites, derivada de uma função real e suas aplicações;
- observação e reflexão de situações cotidianas em busca de situações passíveis de serem modeladas pelo cálculo diferencial;
- modelização das situações.

As referências selecionadas na etapa inicial, a saber, (IME-USP, 2017; PARANHOS, 2009; SILVA, 2012; STEWART, 2011) se deram em função da disponibilidade de acesso às mesmas, mas também por serem representativas no universo da literatura que abordam o cálculo diferencial.

Realizadas essas etapas, seguiu-se para a observação e análise de situações cotidianas, buscando-se com isso, problemas passíveis de serem modelados. Nesse sentido, foram elaborados problemas que se mostraram pertinentes a partir dos

ISSN 2237-1966

resultados teóricos obtidos, ou seja, com uso do cálculo diferencial. Cada uma das situações foi testada e validada com o auxílio dessa ferramenta, conforme expresso nos resultados.

A execução da pesquisa teve duração de um ano, considerando as etapas de revisão de literatura, fundamentação teórica (estudo dos conceitos matemáticos), modelagem das situações problemas e escrita de dois artigos, entre os quais este se inclui.

Resultados e discussão

A partir do estudo das ferramentas do cálculo diferencial e da análise de aplicações publicadas por outros autores, foi possível a investigação de situações do cotidiano, com o intuito de descrevê-las por funções matemáticas e analisá-las sob a óptica das derivadas. Desse modo, são apresentados três modelos, conforme descritos abaixo:

Situação 1: **Lavando roupas**

Uma pia de lavar roupas possui seu reservatório de água com formato de uma semiesfera, cujo raio mede 22 cm (Figura 3). André está lavando roupas e concluí que a altura da água mais adequada no reservatório para a realização de sua atividade é de 15 cm. Se quando a torneira está aberta à vazão de 2000 cm^3/min e a altura da água no reservatório decresce a taxa de 0,2 cm/min, no momento em que a mesma é de 15 cm, a que vazão a torneira deve ser aberta para que o nível da água seja mantido na altura mais adequada para André?

Figura 3: Pia de lavar roupas.

Fonte: Pesquisa direta

À medida que o nível da água varia no reservatório, são formadas calotas esféricas, como representado na Figura 2, cujo volume é dado por

ISSN 2237-1966

$$V = \pi(rh^2 - h^3/3) \qquad (4.1),$$

onde r representa o raio da esfera e h a altura da calota. Derivando a equação 4.1, obtém-se

$$\frac{dV}{dt} = \pi \frac{dh}{dt}(2rh - h^2) (4.2).$$

Considerando $T\ cm^3/min$ e $R\ cm^3/min$, as taxas de variação da torneira e da água retirada por André, respectivamente, (assumindo que André retira água do reservatório a uma taxa constante), pode-se escrever

$$T - R = \pi \frac{dh}{dt}(2rh - h^2) \qquad (4.3).$$

Ora, para manter a taxa de variação do nível da água constante, deve-se ter

$$\frac{dh}{dt} = 0 (4.4),$$

o que implica

$$T - R = 0 \Rightarrow T = R \qquad (4.5).$$

Desse modo, dados os valores expostos na situação do enunciado, a partir de 4.3, tem-se

$$R = T - \pi \frac{dh}{dt}(2rh - h^2)$$

$$\Rightarrow R = 2273,18\ cm^3/min \quad (4.6).$$

Com isso, a partir do resultado 4.5, pode-se afirmar que para a altura da água ser mantida constante a 15 cm, a vazão da torneira deverá ser

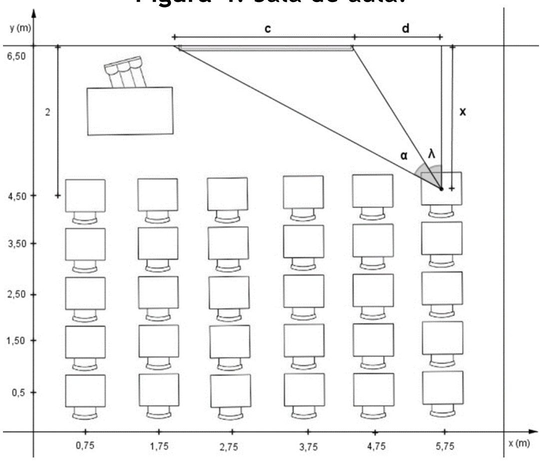
$$T \cong 2,27\ L/min (4.7).$$

O referido exemplo pode ser útil para a economia de água, o que permite fazer conexão entre Matemática e Ciências, mais especificamente com a educação ambiental. Logo, trata-se de uma situação relevante para abordagem acadêmica e social.

Situação 2: **A carteira com melhor visão**

Daniel, diariamente ao chegar a sua sala de aula, tem o hábito de sentar-se em alguma cadeira da fileira ao lado da parede, fileira cuja coordenada da abscissa corresponde a $(5{,}75)$, como representado na Figura 4. Certo dia, Daniel decidiu analisar qual posição naquela fileira lhe proporcionaria o melhor ângulo de visão da lousa. Para isso, tomou o comprimento da lousa $(c = 3{,}5\, m)$ e a distância da extremidade direita da lousa à reta que parte dos seus olhos e intersecta a parede onde ela se encontra, quando sentado em uma cadeira qualquer da fileira $(d = 1{,}2\, m)$. De posse dessas informações, Daniel conseguiu identificar a posição que lhe concederia a melhor visão da lousa. Qual é essa posição? Caso necessário, qual movimentação ele terá de fazer na cadeira que irá sentar?

Figura 4: Sala de aula.



Fonte: Pesquisa direta.

De forma geral, admitindo-se que a lousa possui comprimento c e que sua extremidade direita está a uma distância d da reta que parte dos olhos de Daniel e intersecta a parede, então pode-se considerar a vista superior na Figura 4 para a situação do enunciado. O melhor ângulo de visão é proporcionado quando o ângulo α é maximizado. Sendo x a distância de Daniel a parede em que se encontra a lousa, tem-se que

$$tg(\alpha + \lambda) = \frac{c + d}{x} \quad (4.8).$$

Daí, segue

$$\alpha = tg^{-1}\left(\frac{c + d}{x}\right) - \lambda \qquad (4.9).$$

Onde λ pode ser expresso da seguinte forma:

$$tg\ \lambda = \frac{d}{x} \Rightarrow \lambda = tg^{-1}\left(\frac{d}{x}\right) \qquad (4.10).$$

Com isso, combinando 4.9 e 4.10 é possível escrever α em função de x, ou seja,

$$\alpha(x) = tg^{-1}\left(\frac{c+d}{x}\right) - tg^{-1}\left(\frac{d}{x}\right) \qquad (4.11).$$

Sabe-se que $x \in [2,6]$, pois é esse o intervalo de x em que se encontram as cadeiras da sala de aula de Daniel. Derivando α, obtém-se

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{-(c+d)}{x^2+(c+d)^2} - \frac{-d}{x^2+d^2} \qquad (4.12).$$

Fazendo $\alpha'(x) = 0$, tem-se como ponto crítico

$$x = \sqrt{d(c+d)} \qquad (4.13),$$

que a partir de uma análise do sinal de $f'(x)$ para $x \in [2,6]$, pode-se concluir que (4.13) corresponde ao valor máximo de $f(x)$. Logo, Daniel deverá sentar-se em uma cadeira à

$$x = \sqrt{(1,2)(3,5+1,2)} \Rightarrow x \cong 2,37\ m \qquad (4.14)$$

de distância da lousa, posição representada pela cadeira de coordenada $(5{,}75\ ,4{,}50)$. Com isso, será necessário movimentar a cadeira 37 centímetros para trás, tendo em vista as medidas indicadas na Figura 4.

Essa situação foi pensada como um modelo teórico para explorar o conceito de derivada no processo de ensino e de aprendizagem. No limite, do ponto de vista prático, ela pode ser utilizada, por exemplo, para acomodar pessoas com baixa visão

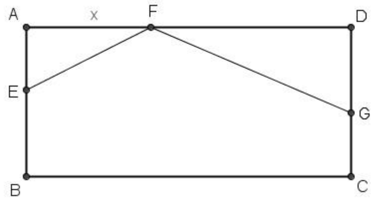
ISSN 2237-1966

em numa sala, uma vez que a coordenada resultante indica o melhor ângulo de visão desse ambiente.

Situação 3: **Minimizando o comprimento do varal a ser utilizado**

A área de serviços da casa de Ana possui formato retangular. Devido a disposição de alguns objetos, é necessário que o varal seja posicionado como representado na figura 5, onde DG > AE. Ana possui uma corda de varal não muita longa e analisa a melhor maneira de posiciona - lá de forma a garantir que não falte corda. Como Ana deve dispor a corda de varal que possui para que o comprimento utilizado seja mínimo?

Figura 5: Área de serviços.



Fonte: autoria própria

Denominando de x a medida de AF, pode-se definir uma função $C(x)$ relacionando o comprimento do varal com a distância x do ponto F ao canto superior esquerdo da área de serviços, representado pelo vértice A. Para isso, deve-se observar que o comprimento do varal é dado pela soma das medidas EF e FG, as quais, pelo Teorema de Pitágoras podem ser expressas como

$$EF = \sqrt{AE^2 + x^2} \qquad FG = \sqrt{DG^2 + DF^2} \qquad (4.15).$$

Além disso, tem-se que DF = BC - x, onde FG pode ser representado por

$$FG = \sqrt{DG^2 + (BC - x)^2} (4.16).$$

Logo, de 4.15 e 4.16 tem-se que a função $C(x)$ será dada pela expressão abaixo

$$C(x) = \sqrt{AE^2 + x^2} + \sqrt{DG^2 + (BC - x)^2} \qquad (4.17)$$

com $x \in [0, BC]$. Para obter os pontos críticos de C, deriva-se

$$C'(x) = \frac{x}{\sqrt{AE^2 + x^2}} + \frac{x - BC}{\sqrt{DG^2 + (BC - x)^2}} \qquad (4.18),$$

Periódico científico de acesso livre

ISSN 2237-1966

Onde fazendo $C'(x) = 0$, obtém-se

$$(DG^2 - AE^2)x^2 + (2.BC.AE^2)x - AE^2.BC^2 = 0 \qquad (4.19).$$

Resolvendo a equação quadrática obtida, tem-se que o ponto crítico de C será dado por

$$x = \frac{BC.AE}{DG + AE} \qquad (4.20).$$

Calculando a segunda derivada de C, tem-se

$$C''(x) = \frac{AE^2}{(AE^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{DG^2}{(DG^2 + (BC - x)^2)^{3/2}} \qquad (4.21).$$

Ao considerar $C''(x) > 0 \,\forall\, x \in [0, BC]$, resulta que 4.20 é o mínimo de C. Logo, supondo que a área de serviços da casa de Ana possui dimensões $4\,m \;x\; 2\,m$ e que AE = 1 m e DG = 1,2 m, o varal deverá ser disposto à $x = 1{,}81\,m$ do vértice A. Além disso, o comprimento mínimo do varal a ser utilizado, nesse caso, deverá ser $C\,(1{,}82) = 4{,}55\,m$.

Essa situação aborda um problema de otimização, muito utilizado em processos industriais. Nesse caso, em particular, pode ser útil para usuários que dispunham de áreas de serviços pequenas. No entanto, considerando que boa parte das pessoas que vivenciam situações dessa natureza não dominam tais conhecimentos, faz-se necessário explicações adicionais para que os referidos resultados se tornem acessíveis aos usuários finais.

Em síntese, considerando que as situações apresentadas são vivenciadas predominantemente por pessoas sem o conhecimento técnico aqui explicitado, esses resultados podem ser úteis principalmente para o meio científico e industrial, no sentido de que podem fazer uso deles para orientar os cidadãos e/ou otimizar seus processos produtivos. Outra importante aplicabilidade pode ser feita no processo de ensino e de aprendizagem, ao se trabalhar esse conteúdo em sala de aula, pois situações cotidianas quase sempre despertam o interesse dos alunos.

Conclusões

ISSN 2237-1966

O desenvolvimento do presente trabalho possibilitou a exposição de aplicações do cálculo diferencial até então não abordadas, evidenciando as potencialidades das derivadas na busca de soluções de problemas cotidianos. Modelando situações cotidianas através de funções reais e resolvendo-as por meio das ferramentas proporcionadas pelo cálculo diferencial, observou-se a aplicação das derivadas nas mais variadas situações sociais como lavar roupas, otimizar comprimento de um varal e localizar pontos de uma sala com melhor ângulo de visão. Essas são, portanto, apenas algumas das inúmeras situações diárias que esse importante conceito matemático, a saber, limite de uma função, materializado através da derivada, permite modelar.

Vale ressaltar também que a modelização dessas situações não foi imediata, o que gerou, em princípio, dificuldades para se obter resultados plausíveis. Isso indica, portanto, que o processo de desenvolvimento dos conceitos matemáticos não foi/é linear, assim como não o é o processo de aprendizagem.

Finaliza-se este artigo com uma sugestão para sua ampliação, que consiste em modelar problemas cotidianos por meio do Cálculo Integral, outra importante ferramenta que está intrinsecamente atrelada ao cálculo diferencial, mas que não foi possível de ser realizada por não ter sido o objetivo aqui traçado.

Referências

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar.** Vol. 8. São Paulo: Atual, 1999.

IME - USP. **História das derivadas.** Disponível em < http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_derivadas.htm >. Acesso em 31 Ago. 2017.

PARANHOS, Marcos de Miranda. **Geometria Dinâmica e o Cálculo Diferencial e Integral**. São Paulo: PUC-SP, 2009.

SILVA, Juscelino Pereira. **A Derivada e Algumas Aplicações**. Teresina: EDUFPI, 2012.

STEWART, James. **Cálculo**. 6 ed. São Paulo: Cengage Leaning, 2011.